Минобрнауки россии

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”**

Математический факультет

Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики

**ОТЧЕТ**

по преддипломной практике (Б2.П.2)

**Изучение единственности слабых решений уравнений  
Навье-Стокса**

Направление 01.03.01 Математика

Профиль: Математическое моделирование

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Зав. кафедрой |  | д.ф.-м.н., проф. | В.Г. Звягин |
| Обучающийся |  |  | Д.А. Мукасеева |
| Руководитель практики |  | к.ф.-м.н., доц. | А.В. Звягин |

Воронеж 2020

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 3 |
| 1. Понятие слабого решения | 4 |
| 2. Единственность слабого решения | 5 |
| Заключение | 5 |
| Список литературы | 10 |

## **Введение**

В данной бакалаврской работе изучается система уравнений Навье-Стокса. Данная система уравнений датируется 1822 г., когда Навье [[1]](#footnote-1) впервые записал уравнение в частных производных для потока вязкой жидкости. Стокс [[2]](#footnote-2) внес свой вклад в 1842 и 1843 г. Эйлер записал уравнения в частных производных для жидкости с нулевой вязкостью — совершено невязкой в 1757 г. Это уравнение тоже полезно, но большинство реальных жидкостей, включая воду и воздух, является вязкими, поэтому Навье и Стокс моделировали уравнение Эйлера таким образом, чтобы учесть это свойство. Они вывели примерно одинаковые уравнения независимо друг от друга, поэтому оно называется в честь них обоих. Навье сделал в процессе вывода несколько математических ошибок, но получил верный ответ, а у Стокса с математикой все было в порядке, и именно поэтому мы знаем, что ответ Навье верен, несмотря на ошибку.

Несмотря на довольно долгие математические исследования данной системы уравнений (начиная с 1822 г.), вопрос существования и гладкости решений для системы Навье-Стокса остался открытым до сих пор. В анализе решений данной системы заключается суть одной из семи "проблем тысячелетия", за решение которых Математический институт Клэя назначил огромную премию. Одним из главных и глобальных толчков при изучении данной системы было доказательство Жаном Лере в 1934 г. существования и в ряде случаев единственности слабых решений для данной системы. Данная бакалаврская работа посвящена как раз рассмотрению и изучению понятия слабого решения для системы уравнений Навье-Стокса, а также изучению единственности слабых решений в двумерном случае.

## **1** **Понятие слабого решения**

Пусть — ограниченная область в пространстве , где , с достаточно гладкой границей . Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений Навье-Стокса

(1)

(2)

(3)

(4)

Здесь — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, — функция давления, — вектор-функция плотности внешних сил, — коэффициент вязкости. , ; ; .

Сформулируем определение сильного решения рассматриваемой задачи (1)-(4).

Сильным решением начально-краевой задачи (1)-(4) называется пара функций и , удовлетворяющих следующим условиям:

1. обобщенные частные производные функций, содержащихся в равенствах (1)-(2), принадлежат пространству ;

2. при подстановке функций уравнения (1)-(2) обращаются в равенства в пространстве ;

3. функция удовлетворяет начальному условию (3) и граничному условию (4).

Введем понятие слабого решения. Для этого пусть и — сильное решение задач (1)-(4).

Сопоставим функции отображение , определенное по формуле

Аналогично определим по формуле

и функцию по формуле

Умножая равенство (1) при фиксированных значениях на функцию скалярно в , получим

Выполним преобразования слагаемых, связанные с интегрированием по частям и перейдем к равенству

(5)

В силу теоремы вложений Соболева интеграл определен.

Кроме того, это слагаемое определяет линейный непрерывный функционал на . Обозначим этот функционал через :

**Определение 1.2** Пусть и . Слабым решением задачи (1)-(4) называется функция , удовлетворяющая для всех и для почти всех значений равенству

(6)

с условием

(7)

## **2** **Единственность слабого решения**

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о единственности слабого решения начально-краевой задачи (1)-(4) для эволюционной системы уравнений Навье-Стокса. Покажем, что в случае слабое решение начально-краевой задачи единственно.

**Теорема 1.2.** Пусть ограниченная область в с достаточно гладкой границей . Тогда слабое решение решение задачи (1)-(4) единственно.

**Заключение**

Подводя итог нашим рассуждениям, данная работа позволяет сделать вывод о том, что вопрос, существования и единственности занимает важное место в науке.

Уравнения Навье-Стокса являются полезными , поскольку они описывают физику многих явлений научной и инженерной сфере. Они могут быть использованы для моделирования различных процессов и явлений. Уравнения Навье-Стокса также представляют большой интерес не только в физическом смысле, но и в чисто математическом.

Таким образом, данная работа показывает важность и сложность представленной задачи.

## **Список литературы**

1. Р. Темам. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — Москва, 1987. — 409 с.

2. Аппроксимационной-топологический переход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье-Стокса. / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко — Москва: Едиториал УРСС, 2004. — 112 с.

3. О.А. Ладожская. Математические вопросы — Москва: Наука, 1970. — 288 с.

4. Ж.Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач — Москва: Мир, 1972 г., –— 587 с.

5. Leray J. Essai sur le mouvement d’un fluide visqueux emplissant l’space — Aeta Math, 1934, 193-248 p.

1. Клод-Луи Навье — французский инженер и физик [↑](#footnote-ref-1)
2. Джордж Стокс — ирландский математик и физик [↑](#footnote-ref-2)